

Νέες λύσεις σε ένα παλαιό πρόβλημα:

Λικνισμός στερεών σωμάτων

Χαραλαμπάκης Α^{1,2}, Τσιάτας Γ³, Τσόπελας Π⁴

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία αυτή παρουσιάζονται πρόσφατα ευρήματα που αφορούν στην μελέτη της ευστάθειας ενός ελεύθερα λικνιζόμενου στερεού σώματος με δεδομένες αρχικές συνθήκες. Συγκεκριμένα, δίνονται τα ακριβή κριτήρια ανατροπής στερεού ορθογωνικού σώματος το οποίο εκτελεί ελεύθερο λικνισμό (free rocking) χρησιμοποιώντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας, στο πλαίσιο τόσο της ακριβούς μη γραμμικής όσο και της προσεγγιστικής γραμμικής θεωρίας. Παρουσιάζεται επίσης η αναλυτική λύση στο μη γραμμικό πρόβλημα ελεύθερου λικνισμού, χρησιμοποιώντας τεχνικές ολοκλήρωσης που προέρχονται από τη λύση του εκκρεμούς. Σχετικά με το πρόβλημα εξαναγκασμένου λικνισμού, παρουσιάζεται μια προσεγγιστική αναλυτική λύση που βασίζεται σε μια ανάλυση της εξίσωσης κίνησης σε σειρά Taylor. Τέλος, παρουσιάζονται φάσματα ανατροπής ημιτονοειδών παλμικών εδαφικών κινήσεων μιας περιόδου, τα οποία κατασκευάζονται πλέον πολύ εύκολα με αριθμητική ολοκλήρωση της εξίσωσης κίνησης μόνο κατά τη διάρκεια του παλμού. Εάν το σώμα δεν ανατραπεί κατά τη διάρκεια του παλμού, η γωνία και η γωνιακή ταχύτητα στο τέλος του παλμού χρησιμοποιούνται για την άμεση εκτίμηση της ανατροπής ή όχι του σώματος χρησιμοποιώντας το ακριβές μη γραμμικό κριτήριο. Τέλος, αναδεικνύονται οι περιοχές ευστάθειας των φασμάτων ανατροπής οι οποίες εξηγούνται λεπτομερώς με χρήση χρωματικών χαρτών.

Λέξεις Κλειδιά: Λικνισμός, Κριτήρια ευστάθειας, Διατήρηση της ενέργειας, Αναλυτικές λύσεις.

1 ΓΕΝΙΚΑ

Το πρόβλημα του λικνισμού απαραμόρφωτων σωμάτων (rocking of rigid blocks) ενδιαφέρει τον Μηχανικό από αρχαιοτάτων χρόνων, καθώς αφορά μία από τις απλούστερες κατασκευές του ανθρώπου. Αναντίστοιχα με την απλότητα της κατασκευής, η δυναμική ενός λικνιζόμενου σώματος είναι απροσδόκητα σύνθετη. Ένα σώμα μπορεί να παρουσιάζει αξιοσημείωτη ευστάθεια σε έντονες σεισμικές διεγέρσεις, όμως να ανατρέπεται από κάποιες ασθενέστερες. Η ευστάθεια του δεν εξαρτάται μονοτονικά από την λυγηρότητα, το μέγεθός του ή τη μέγιστη

¹ Μεταδιδακτορικός ερευνητής ΕΜΠ, e-mail: achar@mail.ntua.gr,

² Ακαδημαϊκός υπότροφος ΠΑΔΑ, achar@uniwa.gr

³ Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ, e-mail: gtsiatas@central.ntua.gr

⁴ Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ, e-mail: tsopelas@central.ntua.gr

επιτάχυνση του σεισμού. Ακόμη και το πλέον θεμελιώδες ερώτημα, ήτοι αν τελικώς το σώμα θα ανατραπεί, ή όχι, χωρίς κάποια εξωτερική διέγερση παρά μόνο με δεδομένες αρχικές συνθήκες, δεν είχε άμεση απάντηση μέχρι λίαν προσφάτως [1] και απαιτούσε αριθμητική ολοκλήρωση των εξισώσεων λικνισμού.

Το έναυσμα για την συστηματική μελέτη του λικνισμού δόθηκε από την εργασία του Housner το 1963 [2]. Από τότε, και για περισσότερο από μισό αιώνα, οι ερευνητές μελετούν συστηματικά το φαινόμενο [3], προσπαθώντας να ανακαλύψουν την αιτία για την οποία εμφανώς υπερβολικά λυγηρές κατασκευές παρουσιάζουν εξαιρετική ευστάθεια ή αναζητώντας τρόπους για να χρησιμοποιήσουν την ευστάθεια αυτή για την σεισμική προστασία σύνθετων κατασκευών.

Στην εργασία αυτή παρουσιάζονται συνοπτικά μερικά από τα πρόσφατα ευρήματα από τους συγγραφείς [1]. Συγκεκριμένα:

(α) δίνεται απάντηση στο ερώτημα που τέθηκε στην εισαγωγική παράγραφο, το οποίο αφορά στην ανατροπή ή όχι ενός ελεύθερα λικνιζόμενου σώματος με δεδομένες αρχικές συνθήκες. Το κριτήριο ανατροπής δίνεται υπό την μορφή μιας απλούστατης σχέσης που προκύπτει από ενεργειακές μεθόδους, στο πλαίσιο τόσο της μη γραμμικής (ακριβούς) όσο και της γραμμικής (προσεγγιστικής) θεωρίας.

(β) δίνεται η αναλυτική λύση της απόκρισης ενός ελεύθερα λικνιζόμενου σώματος, τμηματικά μεταξύ των κρούσεων βάσης, υπό την μορφή σύνθετων συναρτήσεων.

(γ) προτείνεται μια προσεγγιστική αναλυτική μεθοδολογία που επιτρέπει την ταχύτατη επίλυση των εξισώσεων λικνισμού ενός σώματος υπό την επίδραση απλών παλμικών εδαφικών κινήσεων, με πρακτικά ακριβή αποτελέσματα όσον αφορά την τελική ευστάθεια του σώματος.

(δ) γίνεται πλέον ξεκάθαρο, με μελέτη του χώρου φάσεων, ο λόγος για τον οποίο ένα ελευθέρως λικνιζόμενο σώμα ανατρέπεται ή όχι, καθώς και ο λόγος που τα φάσματα ανατροπής έχουν την μορφή που έχουν.

2 ΕΛΕΥΘΕΡΟΣ ΛΙΚΝΙΣΜΟΣ

2.1 Διατύπωση προβλήματος με ενεργειακή θεώρηση

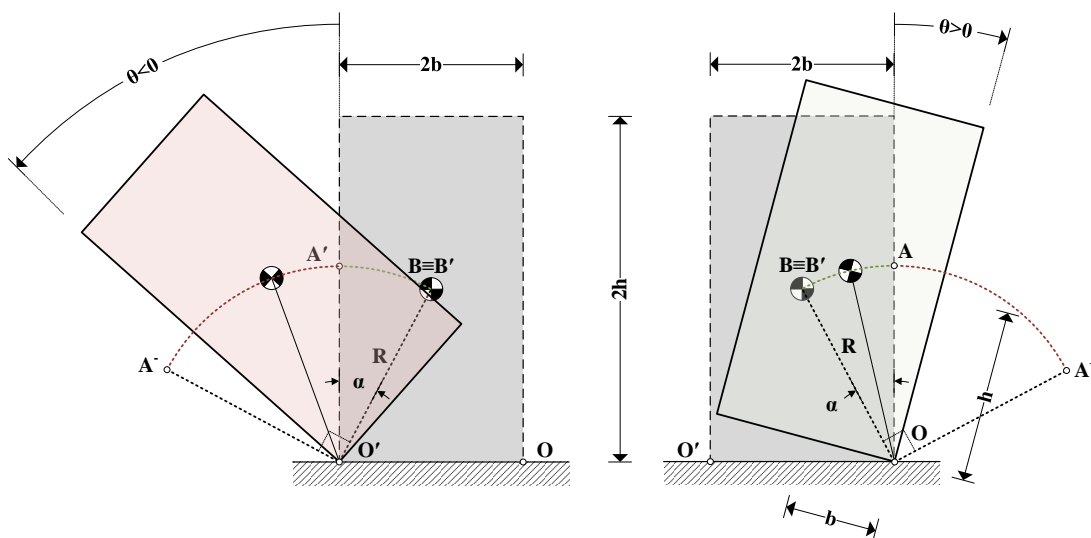
Θεωρούμε τον ελεύθερο λικνισμό (free rocking) ενός στερεού ορθογωνικού σώματος με διαστάσεις $2b \times 2h$ (Σχήμα 1), όπου $R = \sqrt{b^2 + h^2}$ είναι η ημιδιαγώνιος (ακτίνα ραδινότητας), $\lambda = h/b$ η λυγηρότητα και $a = \arctan(b/h)$ είναι η γωνία ραδινότητας του σώματος. Στην μελέτη αυτή αποκλείεται κάθε άλλη μορφή κίνησης, π.χ. ολίσθηση. Η κίνηση περιγράφεται μόνο από την γωνία θ και τις αρχικές συνθήκες $\theta_0, \dot{\theta}_0$ τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$. Για αρνητικές τιμές της γωνίας θ , η περιστροφή του σώματος γίνεται γύρω από το σημείο O' .

Η εξίσωση κίνησης στον ελεύθερο λικνισμό μπορεί να προκύψει από την αρχή διατήρησης της ενέργειας. Η ολική μηχανική ενέργεια είναι το άθροισμα της κινητικής ενέργειας:

$$E_k = \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2 \quad (1)$$

όπου, $\dot{\theta}$ είναι η γωνιακή ταχύτητα και $I_O = 4/3 mR^2$ είναι η ροπή αδρανείας του σώματος γύρω από το σημείο περιστροφής, και της δυναμικής ενέργειας σε γωνία θ :

$$E_p = R[\cos(\alpha - |\theta|) - \cos \alpha]mg \quad (2)$$



Σχήμα 1: Λικνισμός στερεού απαραμόρφωτου ορθογωνικού σώματος.

η οποία τίθεται αυθαιρέτως ίση με το μηδέν όταν $\theta = 0$, δηλαδή όταν το σώμα ισορροπεί κατακόρυφα. Απουσία μη συντηρητικών δυνάμεων, η ολική μηχανική ενέργεια διατηρείται σε όλες τις χρονικές στιγμές, συμπεριλαμβανομένης της αρχικής $t = t_0$:

$$E_k + E_p = E_{k,0} + E_{p,0} = \text{const} \quad (3)$$

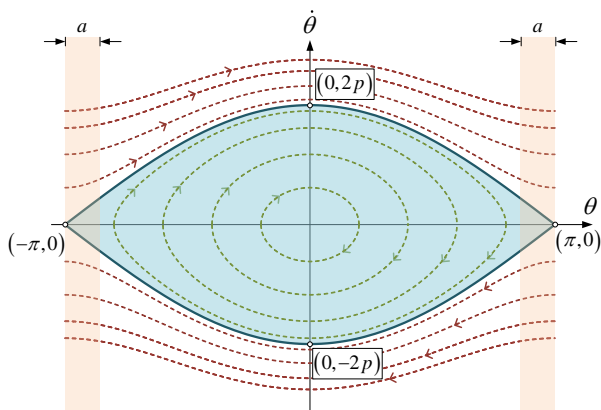
Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες στις σχέσεις (1) και (2), και αντικαθιστώντας στην (3) προκύπτει:

$$\dot{\theta}^2 = \dot{\theta}_0^2 + 4p^2 \left[\sin^2\left(\frac{\alpha - |\theta|}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha - |\theta_0|}{2}\right) \right] \quad (4)$$

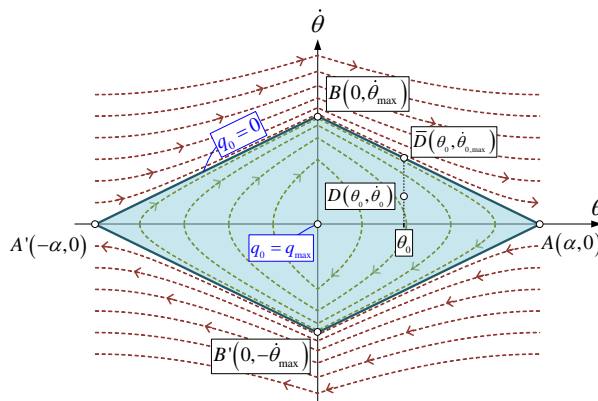
όπου, $p = \sqrt{3g/4R}$ είναι η χαρακτηριστική συχνότητα του σώματος. Η σχέση (4) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να σχεδιαστούν τροχιές στον χώρο φάσεων, ενώ από αυτή προκύπτει και η γνωστή σχέση Euler-Lagrange που διέπει τον ελεύθερο λικνισμό [2]:

$$\ddot{\theta}(t) = -p^2 \sin[a \text{sign} \theta(t) - \theta(t)] \quad (5)$$

Σχεδιάζοντας τον χώρο φάσεων με την υπόθεση ότι δεν υπάρχει απώλεια ενέργειας κατά τις κρούσεις της βάσης (που συμβαίνουν οποτεδήποτε $\theta = 0$ για $t > 0$) προκύπτει το Σχήμα 2β. Η διαχωρίζουσα τροχιά (separatrix) έχει ρομβοειδή μορφή και διέρχεται από τα σημεία A (και A') μέγιστης δυναμικής ενέργειας και μηδενικής κινητικής ενέργειας, καθώς και τα σημεία B (και B') μέγιστης κινητικής ενέργειας και μηδενικής δυναμικής ενέργειας. Η εσωτερική περιοχή χρώματος ανοιχτού μπλε αντιστοιχεί σε ευσταθείς τροχιές λικνισμού, ενώ οι τροχιές εκτός αυτής είναι μη ευσταθείς (δηλαδή, οδηγούν σε ανατροπή). Σημειώνεται ότι ο χώρος φάσεων μπορεί να προκύψει από τον αντίστοιχο χώρο φάσεων του απλού εκκρεμούς, ενώνοντας τις δύο χρωματισμένες ζώνες πλάτους a (Σχήμα 2α).



Σχήμα 2α: Χώρος φάσεων για απλό εκκρεμές με όρια ταλάντωσης μεταξύ $-\pi$ και π .



Σχήμα 2β: Χώρος φάσεων λικνιζόμενου απαράμορφωτου σώματος με όρια ταλάντωσης $-\alpha$ και α (χωρίς απώλεια ενέργειας κατά τις κρούσεις).

Η ενέργεια της διαχωρίζουσας τροχιάς προκύπτει από την σχέση (2) για τα σημεία μηδενικής κινητικής ενέργειας, δηλαδή για τα σημεία A (ή A') με $\theta = a$ (ή $\theta = -a$), και $\dot{\theta} = 0$ ως:

$$E_{sep} = R(1 - \cos a)mg \quad (6)$$

2.2 Ευστάθεια χωρίς απώλειες ενέργειας κατά τις κρούσεις

Θεωρούμε, προσώρας, ότι δεν υπάρχει απώλεια ενέργειας κατά τις κρούσεις στη βάση. Μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα την μέγιστη αρχική γωνιακή ταχύτητα $\dot{\theta}_{max}$ που μπορεί να εφαρμοστεί σε ένα κατακόρυφο σώμα σε ηρεμία ($\theta_0 = 0$), ώστε αυτό να μην ανατραπεί. Χρησιμοποιώντας την σχέση (4) μεταξύ των σημείων A ($\theta_0 = a$, $\dot{\theta}_0 = 0$) και B' ($\theta = 0$, $\dot{\theta} = -\dot{\theta}_{max}$), προκύπτει:

$$\dot{\theta}_{max} = 2p \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (7)$$

Για σώματα μεγάλης λυγηρότητας λ (και μικρής γωνίας ραδινότητας a), η παραπάνω σχέση απλουστεύεται (γραμμικοποιείται) ως $\dot{\theta}_{max} = pa$, θεωρώντας $\sin(\alpha/2) \approx \alpha/2$.

Με τον ίδιο τρόπο, χρησιμοποιώντας δηλαδή την σχέση (4), μπορούμε να γενικεύσουμε και να καταλήξουμε σε ένα απλούστατο κριτήριο για το αν θα ανατραπεί, ή όχι, ένα ελεύθερο λικνιζόμενο σώμα με δεδομένες αρχικές συνθήκες όταν $\theta_0 \neq 0$ (βλ. σημείο D του Σχήματος 2β). Για ευσταθή λικνισμό θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$4p^2 \sin^2\left(\frac{a-|\theta_0|}{2}\right) - \dot{\theta}_0^2 = q_0 \geq 0 \quad (8)$$

Ο όρος q_0 έχει μονάδες γωνιακής ταχύτητας στο τετράγωνο και έτσι η παράσταση $I_0 q_0 / 2$ έχει μονάδες ενέργειας. Το q_0 είναι ένα μέτρο της διαφοράς μεταξύ της ενέργειας της διαχωρίζουσας τροχιάς και της αρχικής ενέργειας του συστήματος. Έτσι, θα πρέπει να είναι θετικό για ευσταθείς τροχιές και οριακά ίσο με το μηδέν όταν η τροχιά ταυτίζεται με την διαχωρίζουσα. Η σημασία του q_0 αναδεικνύεται και από το γεγονός ότι παρουσιάζεται συνεχώς κατά την αναλυτική λύση του μη γραμμικού προβλήματος λικνισμού που παρουσιάζεται παρακάτω. Με βάση το κριτήριο

(7), η μέγιστη αρχική ταχύτητα $\dot{\theta}_{0,max}$ που μπορεί να έχει ένα σώμα για να μην ανατραπεί όταν $\theta_0 \neq 0$ είναι:

$$\dot{\theta}_{0,max} = 2p \sin\left(\frac{a-|\theta_0|}{2}\right) \quad (9)$$

Για σώματα μεγάλης λυγηρότητας το κριτήριο (7) απλουστεύεται (γραμμικοποιείται) ως:

$$p(a - |\theta_0|) - |\dot{\theta}_0| \geq 0 \quad (10)$$

οπότε, και η περιοχή ευσταθούς λικνισμού του Σχήματος 2β μετατρέπεται σε κανονικό ρόμβο. Η μέγιστη τιμή του q_0 , η οποία αντιστοιχεί στο σημείο τομής των αξόνων ($\theta = \dot{\theta} = 0$) είναι:

$$q_{max} = 4p^2 \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) = \dot{\theta}_{max}^2 \quad (11)$$

2.3 Ευστάθεια με απώλειες ενέργειας κατά τις κρούσεις

Οι απώλειες ενέργειας κατά τις κρούσεις της βάσης εξαρτώνται από πολλούς παράγοντες [4-5]. Ακόμη και η παρουσία ενός ξένου σώματος στην διεπιφάνεια σώματος – δαπέδου θα αλλάξει το σημείο εφαρμογής των δυνάμεων, αλλάζοντας δραματικά το αποτέλεσμα. Μια κοίλη διαμόρφωση της κάτω επιφάνειας του σώματος θα έχει ως αποτέλεσμα η εφαρμογή των δυνάμεων να γίνεται στα σημεία περιστροφής O και O' , όπως υπέθεσε ο Housner [2]. Επίσης, μια διαμόρφωση του δαπέδου με κατάλληλες εγκοπές θα έχει ως αποτέλεσμα να αποκλειστεί η ολίσθηση του σώματος.

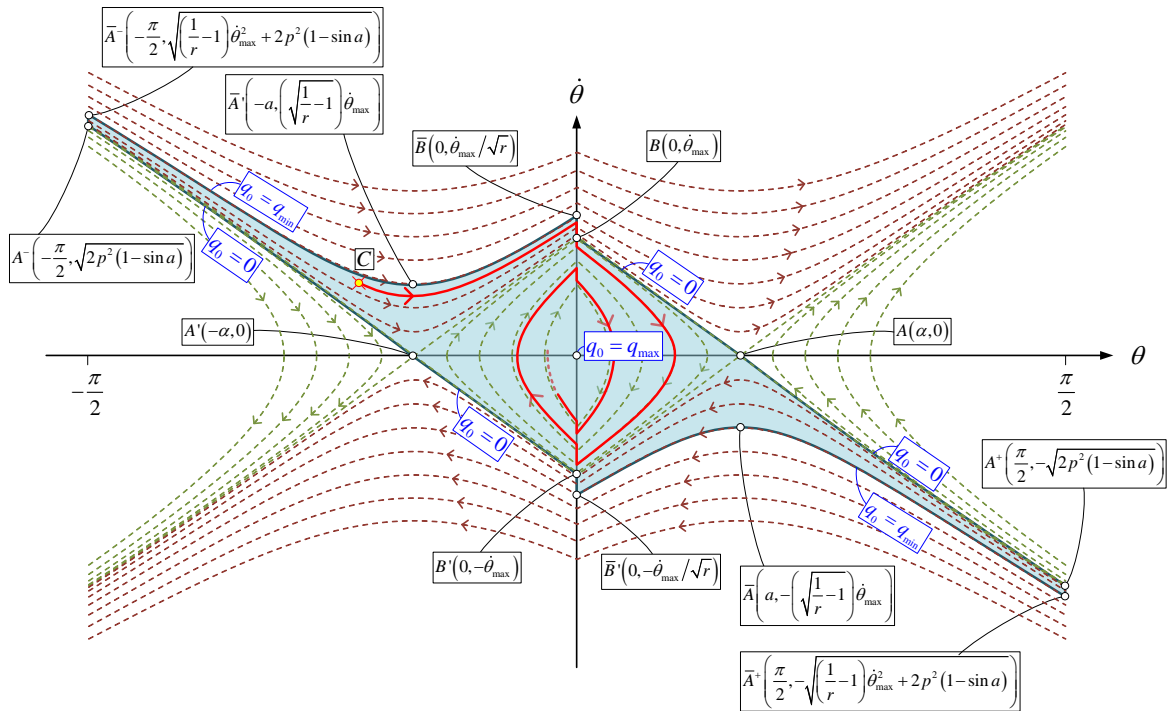
Ο υπολογισμός των απωλειών ενέργειας θα γίνει μέσω του συντελεστή αποκατάστασης r , ο οποίος εκφράζει το τετράγωνο του λόγου των γωνιακών ταχυτήτων μετά και πριν την κρούση. Χρησιμοποιώντας τη διατήρηση της γωνιακής ορμής, προκύπτει η μέγιστη τιμή του συντελεστή αποκατάστασης:

$$r = \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 a\right)^2 \quad (12)$$

για την οποία το σώμα μπορεί να εκτελέσει λικνισμό [2, 6]. Σε υπολογιστικό επίπεδο, η γωνιακή ταχύτητα του σώματος πολλαπλασιάζεται επί $\sqrt{r} < 1$ σε κάθε κρούση. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι ο υπολογισμός των απωλειών ενέργειας κατ' αυτόν τον τρόπο δεν σχετίζεται με τα υπόλοιπα ευρήματα της εργασίας αυτής, τα οποία συνεχίζουν να ισχύουν π.χ. με χρήση μη σταθερού ή μη συμμετρικού r .

Με αναφορά στο Σχήμα 3 προκύπτει ότι, όσον αφορά την ευστάθεια του σώματος, η απώλεια ενέργειας που συμβαίνει στην *πρώτη και μόνο* κρούση βάσης είναι σημαντική αφού, λόγω αυτής, κάποιες τροχιές που προηγουμένως ήταν μη ευσταθείς μετατρέπονται πλέον σε ευσταθείς. Ο λόγος είναι η μείωση της γωνιακής ταχύτητας που συμβαίνει, στο όριο, μεταξύ των σημείων $\bar{B} \rightarrow B$ (και $\bar{B}' \rightarrow B'$) κατά την πρώτη κρούση. Συνεπώς, αν $\theta_0 \dot{\theta}_0 < 0$, δηλαδή αν το αρχικό σημείο της τροχιάς είναι στο δεύτερο ή το τέταρτο τεταρτημόριο, τότε η ελάχιστη τιμή της ποσότητας q_0 για ευσταθή συμπεριφορά δεν είναι το μηδέν αλλά η

$$q_{min} = 4p^2 \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{r}\right) = q_{max} \left(1 - \frac{1}{r}\right) < 0 \quad (13)$$



Σχήμα 3: Χώρος φάσεων λαμβάνοντας υπόψη τις απώλειες ενέργειας κατά την κρούση. Η αρχική ρομβοειδής περιοχή ευστάθειας επεκτείνεται με δύο «λεπίδες» στο δεύτερο και τέταρτο τεταρτημόριο.

Η αρχική γωνία των ευσταθών τροχιών μπορεί να κείται εντελώς εκτός των ορίων $\pm a$ της γωνίας ραδιότητας (θεωρητικά, μέχρι $\pm \pi/2$, αν αυτό ορίσουμε ως όριο ανατροπής), όπως συμβαίνει με το σημείο C του Σχήματος 3. Η αρχικός ρομβοειδής περιοχή ευστάθειας συνεπώς επεκτείνεται με την μορφή δύο «λεπίδων», στο δεύτερο και τέταρτο τεταρτημόριο. Αν οι αρχικές συνθήκες ελεύθερου λικνισμού εμπίπτουν εντός της αναθεωρημένης αυτής περιοχής ευστάθειας, τότε το σώμα τελικώς δεν θα ανατραπεί (και αντίστροφα).

Συνεπώς, το τελικό μη-γραμμικό κριτήριο ευστάθειας σε ελεύθερο λικνισμό γράφεται ως:

$$\left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{2} \wedge \theta_0 \dot{\theta}_0 \leq 0 \wedge q_{\min} \leq q_0 \leq q_{\max} \right) \vee \left(-a \leq \theta_0 \leq a \wedge 0 \leq q_0 \leq q_{\max} \right)$$

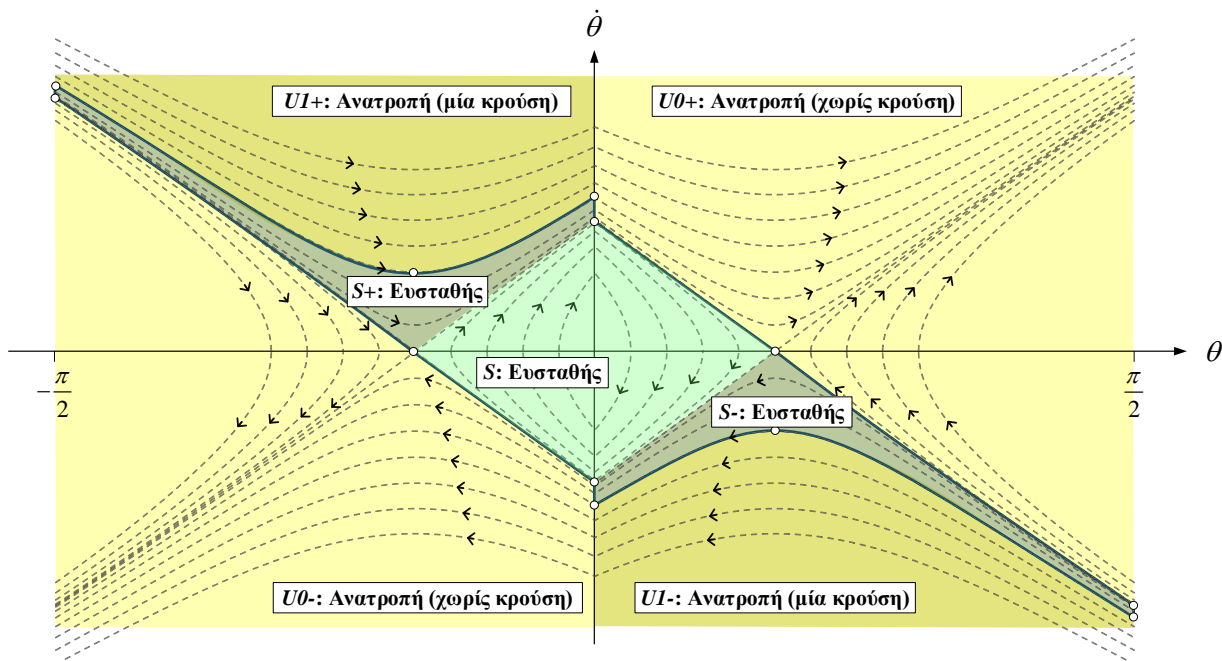
\Leftrightarrow
(14)

ευστάθεια

όπου το “V” αντιστοιχεί στο “OR” και το “Λ” στο “AND”. Η πρώτη παρένθεση αναφέρεται στις «λεπίδες» ενώ η δεύτερη παρένθεση αφορά την αρχική ρομβοειδή περιοχή ευστάθειας. Οι συντεταγμένες όλων των σημείων του Σχήματος 3 προκύπτουν με ενεργειακή θεώρηση, ήτοι με εφαρμογή της σχέσης (4).

Τελικώς, ο χώρος φάσεων χωρίζεται σε επτά περιοχές όπως φαίνεται στο Σχήμα 4. Η περιοχές **S**, **S+**, **S-** είναι οι ευσταθείς περιοχές που αντιστοιχούν στην κεντρική ρομβοειδή περιοχή και τις δύο «λεπίδες», με θετική και αρνητική αρχική γωνιακή ταχύτητα, αντίστοιχα. Οι περιοχές **U1+**, **U0+**, **U1-**, **U0-** είναι οι μη ευσταθείς περιοχές, όπου ο αριθμός (1 ή 0) αντιστοιχεί στο πλήθος κρούσεων πριν την ανατροπή ενώ το πρόσημο (+ ή -) αντιστοιχεί στο πρόσημο της αρχικής

γωνιακής ταχύτητας. Σημειώνεται ότι, στα πλαίσια του ελεύθερου λικνισμού, δεν είναι δυνατές πολλαπλές κρούσεις πριν την ανατροπή.



Σχήμα 4: Διαχωρισμός του χώρου φάσεων σε επτά περιοχές. Οι πράσινες περιοχές «S» είναι ευσταθείς, ενώ οι κίτρινες περιοχές «U» είναι μη ευσταθείς.

2.4 Αναλυτική λύση των εξισώσεων ελεύθερου λικνισμού

Η διαφορική εξίσωση (4) ολοκληρώνεται με τεχνικές που εφαρμόζονται στο απλό εκκρεμές. Για περισσότερες πληροφορίες, ο αναγνώστης μπορεί να αναφερθεί στο άρθρο [1]. Στην περίπτωση που $\theta > 0 \wedge \theta_0 > 0$ προκύπτει:

$$\theta(t) = a + 2 \operatorname{am} \left[\mp \frac{\sqrt{-q_0}}{2} t + F \left(\frac{\theta_0 - a}{2}, \frac{2p}{\sqrt{q_0}} \right), \frac{2p}{\sqrt{q_0}} \right] \quad (15)$$

όπου το άνω πρόσημο αντιστοιχεί σε $\dot{\theta}_0 \geq 0$, το κάτω πρόσημο αντιστοιχεί σε $\dot{\theta}_0 < 0$, $u = F(\varphi, k)$ είναι το ελλειπές ελλειπτικό ολοκλήρωμα πρώτου είδους (incomplete elliptic integral of the first kind), και $\varphi = F^{-1}(u, k) = \operatorname{am}(u, k)$ με $(0 < k^2 < 1)$ είναι η συνάρτηση εύρους Jacobi (Jacobi amplitude function with elliptic modulus k). Η αντίστοιχη έκφραση για την γωνιακή ταχύτητα είναι:

$$\dot{\theta}(t) = \mp \sqrt{-q_0} \operatorname{dn} \left[\mp \frac{\sqrt{-q_0} t}{2} + F \left(\frac{\theta_0 - a}{2}, \frac{2p}{\sqrt{q_0}} \right), \frac{2p}{\sqrt{q_0}} \right] \quad (16)$$

όπου $\operatorname{dn}(z, k) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2[\operatorname{am}(z, k)]}$ με $k^2 < 1$ είναι η συνάρτηση Jacobi DN. Στη συνέχεια δίνονται οι αναλυτικές σχέσεις για όλες τις περιπτώσεις πρόσημων γωνίας και γωνιακής ταχύτητας. Οι σχέσεις δίνονται τμηματικά, μεταξύ των χρονικών στιγμών που συμβαίνει κρούση βάσης και πραγματοποιείται απώλεια ενέργειας. Αυτό δεν περιορίζει, αλλά μάλλον γενικεύει, την μέθοδο αφού είναι δυνατή η χρήση οποιουδήποτε νόμου απώλειας ενέργειας (μεταβάλλοντας την σχέση (24)).

2.4.1 Επίλυση μέχρι την πρώτη κρούση

Ορίζονται οι παρακάτω βοηθητικές ποσότητες:

$$\text{sgn}_1 = \text{sgn}_1(\theta_0, \dot{\theta}_0) = \text{sign} \left[\text{sign}(\theta_0) + \frac{\text{sign}(\dot{\theta}_0)}{2} \right] \quad (17)$$

$$\text{sgn}_2 = \text{sgn}_2(\theta_0, \dot{\theta}_0) = \text{sign} \left[\text{sign}(\theta_0) \text{sign}(\dot{\theta}_0) + \frac{1}{2} \right] \quad (18)$$

όπου

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad (19)$$

Με αναφορά στο Σχήμα 5, η γωνία $\theta_{01}(t)$ και η γωνιακή ταχύτητα $\dot{\theta}_{01}(t)$ ως την πρώτη κρούση δίνονται ως:

$$\theta_{01}(t) = \text{sgn}_1 \left\{ a - 2 \text{am} \left[\frac{\text{sign}(q_0) \text{sgn}_2}{2} \sqrt{-q_0} t - \text{F} \left(\frac{|\theta_0| - a}{2}, \frac{2p}{\sqrt{q_0}} \right), \frac{2p}{\sqrt{q_0}} \right] \right\} \quad (20)$$

$$\dot{\theta}_{01}(t) = -\text{sign}(q_0) \text{sgn}_1 \text{sgn}_2 \sqrt{-q_0} \text{dn} \left[\text{F} \left(\frac{|\theta_0| - a}{2}, \frac{2p}{\sqrt{q_0}} \right) - \frac{\text{sign}(q_0) \text{sgn}_2}{2} \sqrt{-q_0} t, \frac{2p}{\sqrt{q_0}} \right] \quad (21)$$

Η χρονική στιγμή t_1 της πρώτης κρούσης δίνεται ως:

$$t_1 = -\frac{2 \text{sign}(q_0)}{\sqrt{-q_0}} \left[\text{F} \left(\frac{a}{2}, \frac{2p}{\sqrt{q_0}} \right) - \text{sgn}_2 \text{F} \left(\frac{|\theta_0| - a}{2}, \frac{2p}{\sqrt{q_0}} \right) - 2 \text{H}(q_0) \text{dn}^{-1} \left(0, \frac{2p}{\sqrt{q_0}} \right) \right] \quad (22)$$

όπου, $\text{H}(x)$ είναι η συνάρτηση Heaviside. Η γωνιακή ταχύτητα $\dot{\theta}_{1p}$ λίγο πριν την πρώτη κρούση μπορεί να υπολογιστεί από την σχέση (4) ως:

$$\dot{\theta}_{1p} = -\text{sgn}_1 \sqrt{4p^2 \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) - q_0} \quad (23)$$

2.4.2 Επίλυση μετά την πρώτη κρούση

Έστω $n = 1, 2, \dots$ το πλήθος των κρούσεων βάσης που έχουν πραγματοποιηθεί. Η γωνιακή ταχύτητα αμέσως μετά την n -στη κρούση δίνεται από την σχέση:

$$\dot{\theta}_{na} = (-1)^{n-1} r^{n/2} \dot{\theta}_{1p} \quad (24)$$

Η τιμή της παραμέτρου q αμέσως μετά την n -στη κρούση δίνεται ως:

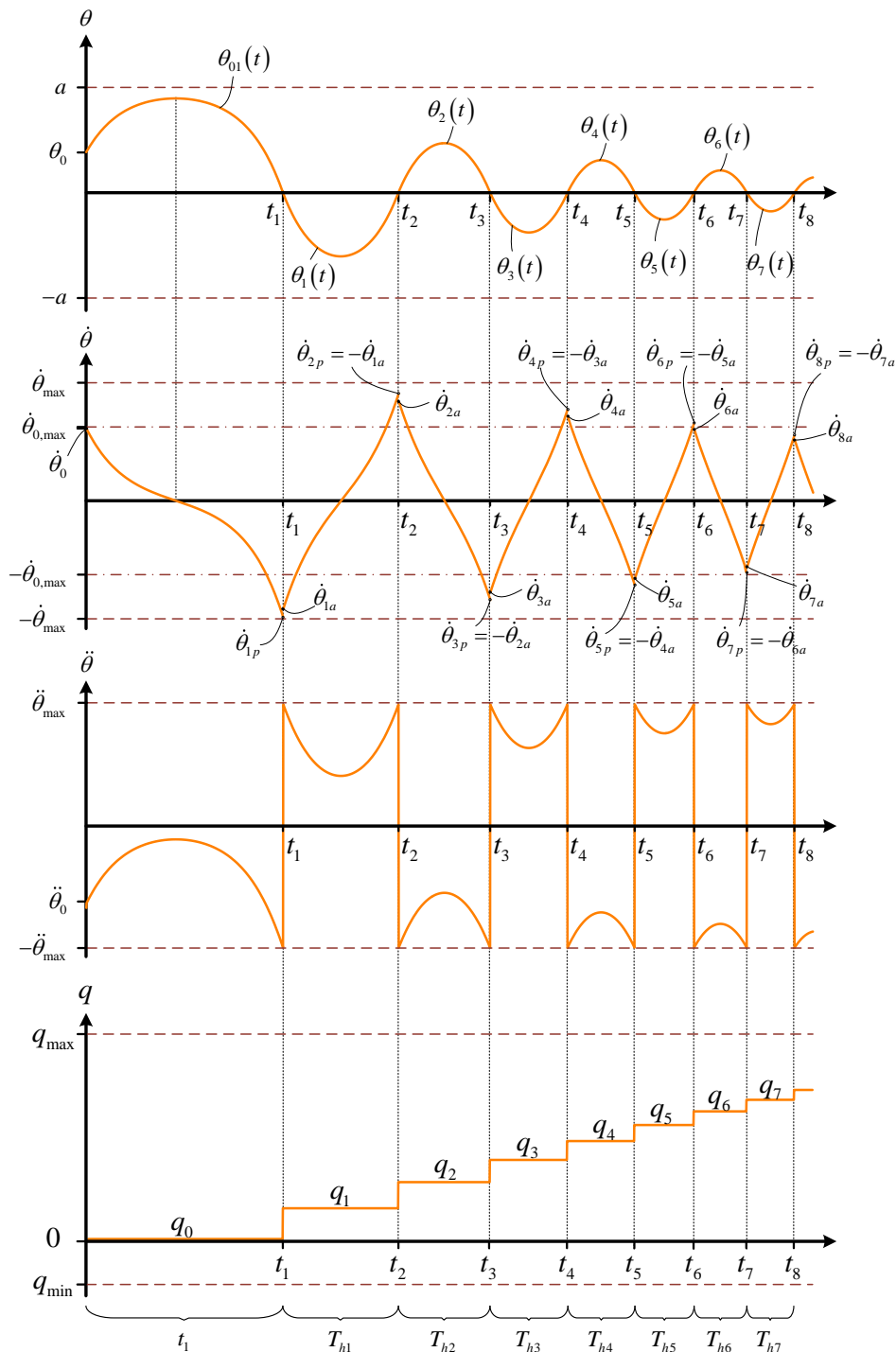
$$q_n = 4p^2 \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) - \dot{\theta}_{na}^2 \quad (25)$$

Το ήμισυ της περιόδου ταλάντωσης, ή ισοδύναμα το χρονικό διάστημα μεταξύ της n -στης και $(n+1)$ -στης κρούσης δίνεται ως:

$$T_{hn} = \frac{4 \left[dn^{-1} \left(0, \frac{2p}{\sqrt{qn}} \right) - F \left(\frac{a}{2}, \frac{2p}{\sqrt{qn}} \right) \right]}{\sqrt{-qn}} \quad (26)$$

Η χρονική στιγμή της επόμενης κρούσης υπολογίζεται αναδρομικά ως:

$$t_{n+1} = t_n + T_{hn} \quad (27)$$



Σχήμα 5: Χρονοϊστορία της γωνίας $\theta(t)$, της γωνιακής ταχύτητας $\dot{\theta}(t)$, της γωνιακής επιτάχυνσης $\ddot{\theta}(t)$ και της παραμέτρου q .

Καθώς η ενέργεια του συστήματος τείνει στο μηδέν μετά από συνεχόμενες κρούσεις, η σχέση (26) συγκλίνει σε ένα άνω όριο του t , μετά το οποίο κάθε κίνηση πρακτικά σταματά ($T_{hn} \rightarrow 0$). Τέλος, η γωνία και η γωνιακή ταχύτητα δίνονται ως:

$$\theta_n(t) = \text{sign}(\dot{\theta}_{na}) \left\{ \alpha - 2 \text{am} \left[\frac{\sqrt{-q_n}}{2} (t - t_n) + F \left(\frac{a}{2}, \frac{2p}{\sqrt{q_n}} \right), \frac{2p}{\sqrt{q_n}} \right] \right\} \quad (28)$$

$$\dot{\theta}_n(t) = -\text{sign}(\dot{\theta}_{na}) \sqrt{-q_n} \text{dn} \left[\frac{\sqrt{-q_n}}{2} (t - t_n) + F \left(\frac{a}{2}, \frac{2p}{\sqrt{q_n}} \right), \frac{2p}{\sqrt{q_n}} \right] \quad (29)$$

Η μέγιστη γωνιακή επιτάχυνση προκύπτει από την σχέση (6) ως:

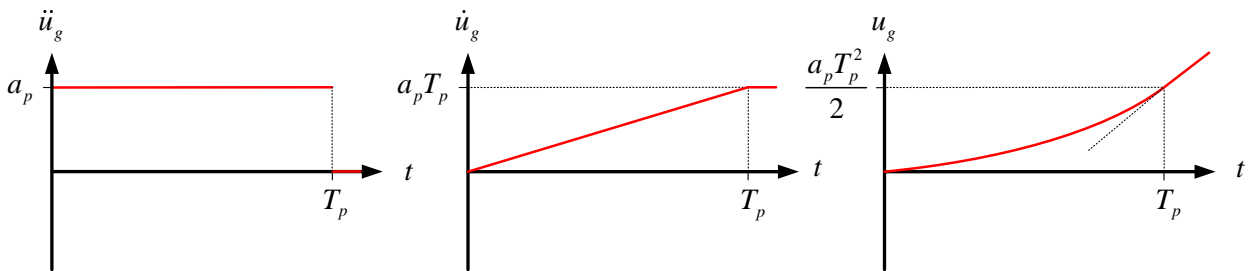
$$\ddot{\theta}_{\max} = p^2 \sin a \quad (30)$$

3 ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΟΣ ΛΙΚΝΙΣΜΟΣ ΛΟΓΩ ΕΔΑΦΙΚΩΝ ΠΑΛΜΩΝ

Η μελέτη των εδαφικών παλμών είναι ιδιαίτερα χρήσιμη αφού με αυτή προκύπτουν σημαντικά συμπεράσματα για την συμπεριφορά των κατασκευών έναντι σεισμικών διεγέρσεων. Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζεται μια προσεγγιστική αναλυτική μέθοδος υπολογισμού, η οποία βασίζεται σε ανάλυση της εξίσωσης κίνησης σε σειρά Taylor. Βασικό ζητούμενο της μεθόδου είναι ο, χωρίς χρονική ολοκλήρωση, υπολογισμός της γωνιάς θ_0 και της γωνιακής ταχύτητας $\dot{\theta}_0$ με την οποία το σώμα εισέρχεται στη φάση του ελεύθερου λικνισμού, ήτοι στο τέλος του παλμού. Μετά, με χρήση του ακριβούς κριτηρίου (14), μπορεί κάποιος να αποφανθεί αμέσως για την τελική ευστάθεια ή ανατροπή του σώματος, χωρίς περαιτέρω υπολογισμούς. Οι τελικές σχέσεις που προκύπτουν είναι απλές και αρκούντως ακριβείς για τον σκοπό για τον οποίο χρησιμοποιούνται. Η μέθοδος θα υλοποιηθεί παρακάτω για ορθογωνικούς (σταθερούς) παλμούς (βλ. Σχήμα 6), όμως μπορεί να εφαρμοστεί και σε πιο πολύπλοκους παλμούς κατά τμήματα.

Η εξίσωση κίνησης ενός λικνιζόμενου σώματος υπό την επίδραση ενός εδαφικού παλμού δίνεται από την σχέση:

$$\ddot{\theta}(t) = -p^2 \left\{ \sin[a \text{sign} \theta(t) - \theta(t)] + \frac{\ddot{u}_g}{g} \cos[a \text{sign} \theta(t) - \theta(t)] \right\} \quad (31)$$



Σχήμα 6: Εδαφική επιτάχυνση, ταχύτητα και μετακίνηση για έναν ορθογωνικό παλμό.

Για έναν ορθογωνικό παλμό, $\ddot{u}_g = a_p$ για $0 \leq t \leq T_p$ το οποίο έχει ως αποτέλεσμα αρνητικές γωνίες περιστροφής. Η σχέση (31) απλοποιείται ως:

$$\ddot{\theta}(t) = p^2 \left\{ \sin[\alpha + \theta(t)] - \frac{\alpha_p}{g} \cos[\alpha + \theta(t)] \right\} \quad (32)$$

Αναλύοντας το δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης σε σειρά Taylor δεύτερης τάξης γύρω από 0, με $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$, $\ddot{\theta}(0) = p^2(g \sin a - \alpha_p \cos a)/g$ προκύπτει η πολυωνυμική σχέση:

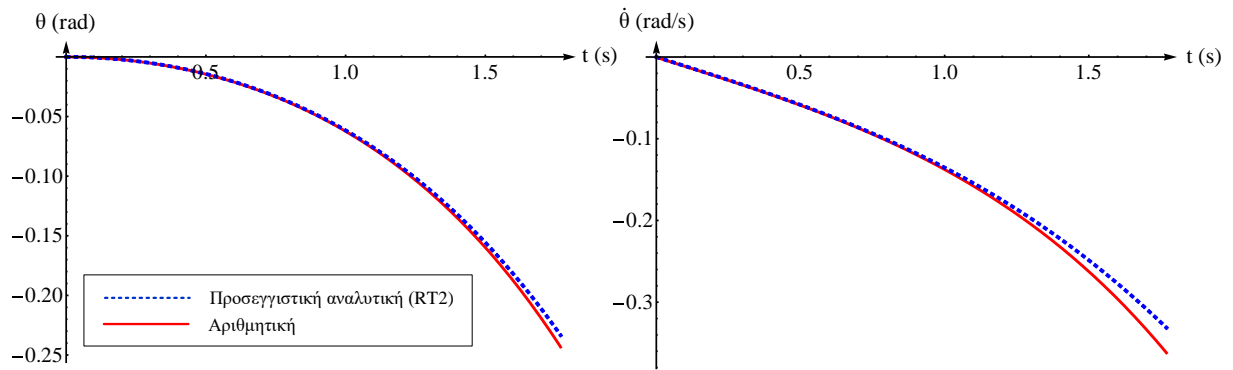
$$\ddot{\theta}_{RT2}(t) = \frac{p^2}{g} (g \sin a - \alpha_p \cos a) + \frac{p^4}{4g^2} [(g^2 - \alpha_p^2) \sin 2a - 2g\alpha_p \cos 2a] t^2 \quad (33)$$

η οποία με διαδοχικές ολοκληρώσεις με τις αντίστοιχες αρχικές συνθήκες οδηγεί σε:

$$\dot{\theta}_{RT2}(t) = \frac{p^2}{g} (g \sin a - \alpha_p \cos a) t + \frac{p^4}{12g^2} [(g^2 - \alpha_p^2) \sin 2a - 2g\alpha_p \cos 2a] t^3 \quad (34)$$

$$\theta_{RT2}(t) = \frac{p^2}{2g} (g \sin a - \alpha_p \cos a) t^2 + \frac{p^4}{48g^2} [(g^2 - \alpha_p^2) \sin 2a - 2g\alpha_p \cos 2a] t^4 \quad (35)$$

Με αναφορά σε παράδειγμα που αναλύεται από τον Makris [3] και φαίνεται στο Σχήμα 7, παρατηρείται ότι οι διαφορές στη γωνία και την γωνιακή ταχύτητα στο τέλος του παλμού είναι σχετικά μικρές, όχι όμως αμελητέες. Παρόλα αυτά, λόγω της ευαισθησίας του φαινομένου του λικνισμού στην τελική ανατροπή του σώματος ή όχι, αποδεικνύεται (κατά την παραγωγή των φασμάτων ανατροπής) ότι οι σχέσεις (33)-(35) είναι αρκούντως ακριβείς. Ενδεικτικά, η προτεινόμενη μέθοδος οδηγεί σε μείωση του υπολογιστικού κόστους κατά 60 φορές περίπου. Φυσικά, είναι δυνατή η εφαρμογή της μεθόδου σε περισσότερα του ενός βήματα, για ακόμη καλύτερα αποτελέσματα.



Σχήμα 7: Γωνία και γωνιακή ταχύτητα ορθογωνικού σώματος με $b = 1 \text{ m}$, $h = 5.67 \text{ m}$, $p \cong 1.13 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $a \cong 10 \text{ deg}$, υπό ορθογωνικό εδαφικό παλμό με $T_p = 2/p \cong 1.77 \text{ s}$, $\alpha_p = 1.5g \tan a$.

4 ΦΑΣΜΑΤΑ ΑΝΑΤΡΟΠΗΣ ΕΔΑΦΙΚΩΝ ΠΑΛΜΩΝ

Τα φάσματα επιτάχυνσης ανατροπής μπορούν να κατασκευαστούν για διάφορους τύπους εδαφικών παλμών και αποτελούν ένα σημαντικό εργαλείο σχεδιασμού. Η εξίσωσης κίνησης (31) ολοκληρώνεται αριθμητικά με μηδενικές αρχικές συνθήκες για το χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq T_f$, όπου $T_f \leq T_p$ ο χρόνος κατά τον οποίο το σώμα λικνίζεται και T_p η χρονική διάρκεια του παλμού. Υπολογίζεται η γωνία θ_0 και γωνιακή ταχύτητα $\dot{\theta}_0$ στο τέλος του παλμού, με την οποία το σώμα εισέρχεται στη φάση του ελεύθερου λικνισμού. Στο σημείο αυτό, υπολογίζεται αμέσως

η τελική ευστάθεια ή η ανατροπή του σώματος με βάση το ακριβές κριτήριο (14), χωρίς άλλους υπολογισμούς.

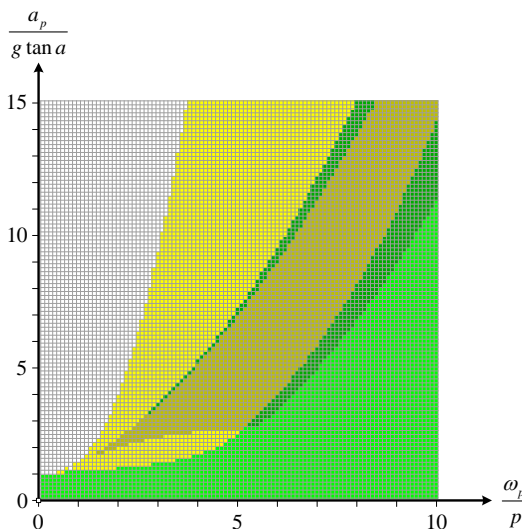
Στην παράγραφο αυτή αναλύεται μια περίπτωση που έχει εξεταστεί στην βιβλιογραφία [3] με τα εξής χαρακτηριστικά: $b = 1 \text{ m}$, $h = 5.67 \text{ m}$, $R \approx 5.758 \text{ m}$, $p \approx 1.13 \text{ rad/s}$, $a = \arctan(b/h) \approx 0.175 \text{ rad} \approx 10 \text{ deg}$, $r_{\max} \approx 0.912$. Στην συνέχεια, παράγονται και αναλύονται φάσματα ανατροπής για ημιτονοειδείς παλμούς διάρκειας μιας περιόδου. Άλλου τύπου παλμοί εξετάζονται στο άρθρο [1].

4.1 Ημιτονοειδής παλμός τύπου Α μιας περιόδου

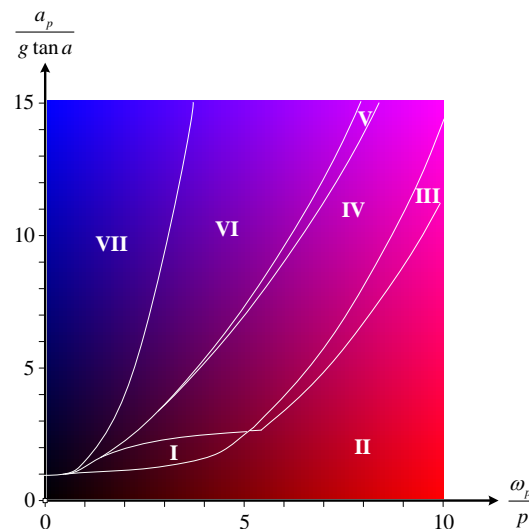
Η εδαφική επιτάχυνση δίνεται από την σχέση:

$$\ddot{u}_g(t) = a_p \sin(\omega_p t + \psi) \quad (36)$$

όπου, η χρονική στιγμή $t = 0$ αντιστοιχεί στην έναρξη του λικνισμού, a_p είναι το πλάτος, ω_p είναι η κυκλική συχνότητα και $\psi = \arcsin(g \tan \alpha / a_p)$ είναι η φάση στη στιγμή ξεκινά ο λικνισμός. Η περίοδος του παλμού δίνεται ως $T_p = 2\pi / \omega_p$, ενώ η διάρκεια του εξαναγκασμένου λικνισμού υπολογίζεται ως $T_f = (2\pi - \psi) / \omega_p$.



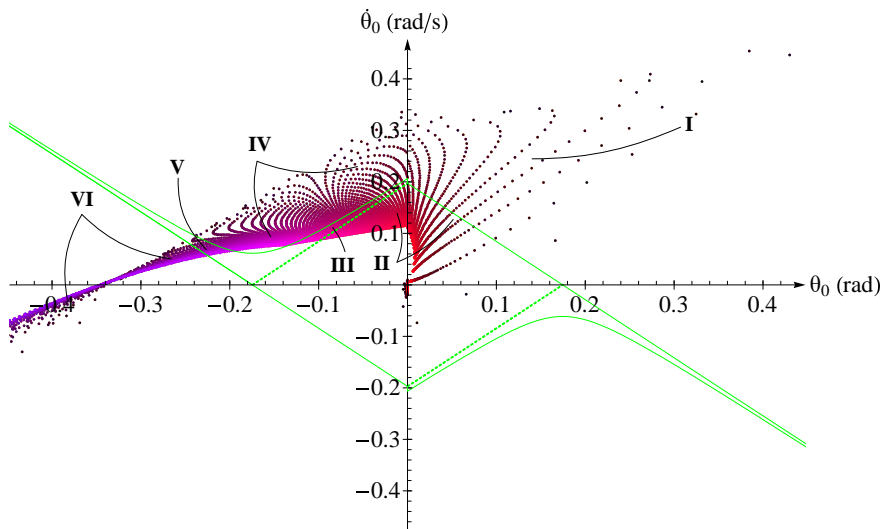
Σχήμα 8α: Φάσμα επιτάχυνσης ανατροπής λόγω ημιτονοειδούς παλμού μιας περιόδου ($\alpha \approx 10 \text{ deg}$, $p \approx 1.13 \text{ rad/s}$, $r = r_{\max} \approx 0.912$).



Σχήμα 8β: Χρωματική κωδικοποίηση των δεδομένων εισόδου (ω_p/p , $a_p/g \tan \alpha$) της φάσης εξαναγκασμένου λικνισμού λόγω παλμού, με σημειωμένα τα όρια των περιοχών του Σχήματος 8α.

Το φάσμα επιτάχυνσης ανατροπής φαίνεται στο Σχήμα 8α, όπου το πράσινο αφορά ευσταθείς περιοχές ενώ το κίτρινο μη ευσταθείς. Ειδικότερα, το σκούρο πράσινο αντιστοιχεί σε σημεία που, μετά την εκπνοή του παλμού, κατέληξαν στην περιοχή των «λεπίδων» **S+** ή **S-** του Σχήματος 4. Το ανοιχτό πράσινο αντιστοιχεί σε σημεία που κατέληξαν στην ρομβοειδή περιοχή **S**. Το ανοιχτό κίτρινο αντιστοιχεί σε σημεία που οδηγούν σε ανατροπή χωρίς κρούση (**U0+** και **U0-**), ενώ το σκούρο κίτρινο σε ανατροπή με μία κρούση (**U1+** και **U1-**). Τέλος, η γκρι περιοχή αφορά σημεία που ανατράπηκαν κατά την διάρκεια του εδαφικού παλμού και δεν εισέρχονται καν στην φάση ελεύθερου λικνισμού.

Επιπλέον, μπορούμε να σχεδιάσουμε τα διάφορα σημεία στον χώρο φάσεων την χρονική στιγμή της εκπνοής του παλμού και να τα συσχετίσουμε με τα αρχικά δεδομένα εισόδου. Για τον λόγο αυτό χρησιμοποιούμε την χρωματική κωδικοποίηση του Σχήματος 8β, όπου, ξεκινώντας με μαύρο κάτω αριστερά, προσθέτουμε κόκκινο στον οριζόντιο άξονα προς τα δεξιά και μπλε στον κατακόρυφο άξονα προς τα πάνω. Επιπλέον σημειώνουμε τα όρια των διαφόρων περιοχών του Σχήματος 8α, και τα αριθμούμε ως I – VII. Ο χώρος φάσεων την χρονική στιγμή της εκπνοής του παλμού παίρνει την μορφή του Σχήματος 9.

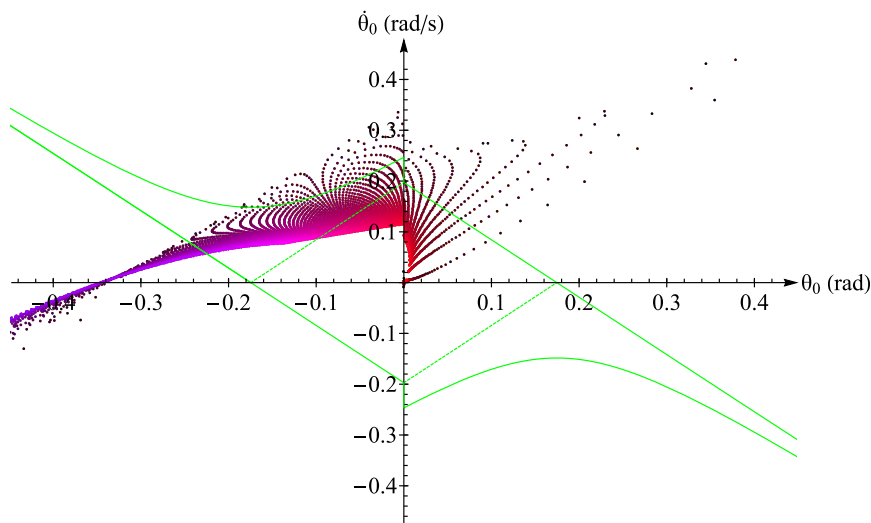


Σχήμα 9: Χώρος φάσεων $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$ την χρονική στιγμή της εκπνοής του εδαφικού παλμού ($a \approx 10 \text{ deg}$, $p \approx 1.13 \text{ rad/s}$, $r = r_{\max} \approx 0.912$, ημιτονοειδής παλμός μιας περιόδου).

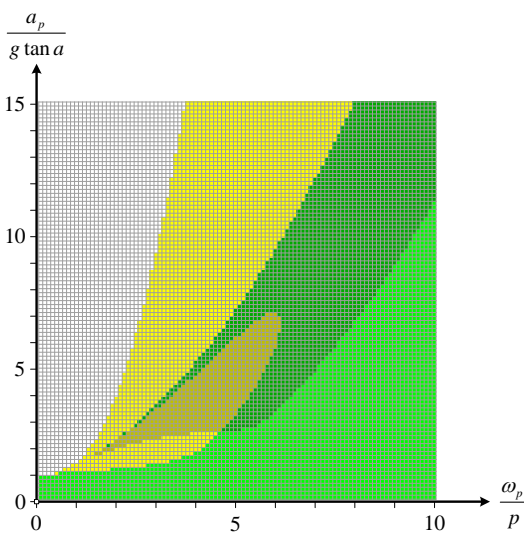
Με αναφορά στο Σχήμα 9, είναι προφανές ότι η περιοχή I αφορά αδύναμους παλμούς μέσης περιόδου που καταλήγουν στην μη ευσταθή περιοχή $U0+$. Η περιοχή II αφορά παλμούς μέσης και μικρής περιόδου, καθώς και τους παλμούς για τους οποίους δεν ξεκίνησε καν ο λικνισμός ($a_p/g \tan a < 1$). Όλοι αυτοί καταλήγουν στην ευσταθή ρομβοειδή περιοχή S . Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι και οι τρεις περιοχές III, IV, και V αναφέρονται σε ισχυρούς παλμούς μικρής περιόδου (ή σε μεγάλα σώματα). Είναι ακριβώς η ιδιάζουσα μορφή της «λεπίδας» η οποία τα χωρίζει, με τις περιοχές III και V να είναι ευσταθείς ($S+$) και η περιοχή IV μη ευσταθής ($U1+$). Η περιοχή VI οδηγεί σε ανατροπή χωρίς κρούση ($U0-$), ενώ η περιοχή VII δεν απεικονίζεται, αφού έχει πραγματοποιηθεί ανατροπή πριν καν εκπνεύσει ο παλμός.

Σε όλους τους υπολογισμούς ως τώρα έχει χρησιμοποιηθεί η μέγιστη τιμή r_{\max} του συντελεστή αποκατάστασης. Η χρήση μιας μικρότερης τιμής δεν θα μεταβάλλει σημαντικά την θέση των σημείων του Σχήματος 9, επειδή τα περισσότερα από αυτά (πρακτικά, όλα με $\theta_0 < 0$) αφορούν σε περιπτώσεις που δεν έχουν υποστεί κρούση κατά την διάρκεια του παλμού. Παρόλα αυτά, η μικρότερη τιμή του r σημαίνει σημαντικά μεγαλύτερες «λεπίδες», οι οποίες ενώνουν τις περιοχές III και V, εις βάρος της περιοχής IV, όπως φαίνεται στο Σχήμα 10, όπου έχει χρησιμοποιηθεί $r = 0.7r_{\max}$. Αυτό αποτυπώνεται ξεκάθαρα και στο φάσμα επιτάχυνσης ανατροπής των Σχημάτων 11α,β, όπου έχει χρησιμοποιηθεί $r = 0.85r_{\max}$ και $r = 0.7r_{\max}$, αντίστοιχα. Τέλος, λόγω της μεγαλύτερης απώλειας ενέργειας στην κρούση, περισσότερες τροχιές της περιοχής I

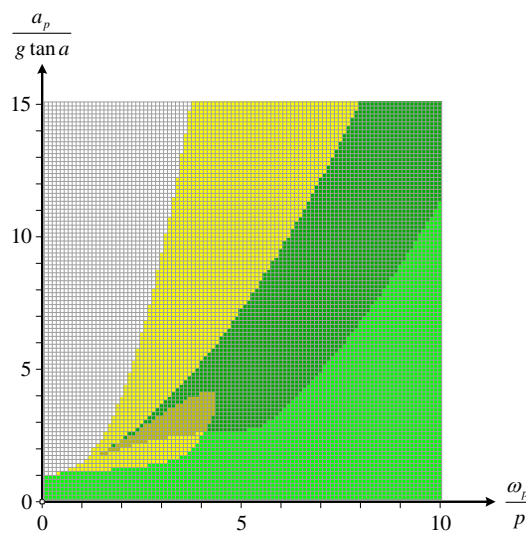
καταλήγουν στην ρομβοειδή ευσταθή περιοχή S , και για αυτόν τον λόγο η περιοχή I συρρικνώνεται.



Σχήμα 10: Χώρος φάσεων $(\theta_0, \dot{\theta}_0)$ την χρονική στιγμή της εκπνοής του εδαφικού παλμού ($a \approx 10 \text{ deg}$, $p \approx 1.13 \text{ rad/s}$, $r = 0.7r_{\max}$, ημιτονοειδής παλμός μιας περιόδου).



Σχήμα 11α: Φάσμα επιτάχυνσης ανατροπής λόγω ημιτονοειδούς παλμού μιας περιόδου ($a \approx 10 \text{ deg}$, $p \approx 1.13 \text{ rad/s}$, $r = 0.85r_{\max}$).



Σχήμα 11β: Φάσμα επιτάχυνσης ανατροπής λόγω ημιτονοειδούς παλμού μιας περιόδου ($a \approx 10 \text{ deg}$, $p \approx 1.13 \text{ rad/s}$, $r = 0.7r_{\max}$).

5 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα ευρήματα της εργασίας αυτής συνεισφέρουν σημαντικά στην κατανόηση της ευστάθειας στερεών σωμάτων έναντι λικνισμού, με την πλήρη διαλεύκανση της δεύτερης φάσης της απόκρισης, δηλαδή της φάσης του ελεύθερου λικνισμού που πραγματοποιείται μετά την εκπνοή της διέγερσης. Αυτή συνίσταται: (α) στην αναλυτική λύση της απόκρισης του σώματος σε ελεύθερο λικνισμό, (β) την διατύπωση του ακριβούς μη γραμμικού κριτηρίου ανατροπής με βάση ενεργειακές μεθόδους και (γ) της ακριβούς χαρτογράφησης του χώρου των φάσεων που οδηγούν

σε ευστάθεια ή ανατροπή. Παρουσιάζεται επίσης μια προσεγγιστική αναλυτική μέθοδος η οποία επιτρέπει τον υπολογισμό της απόκρισης κατά την πρώτη φάση (εξαναγκασμένος λικνισμός), χωρίς χρονική ολοκλήρωση, με σημαντικά υπολογιστικά πλεονεκτήματα.

6 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Charalampakis AE, Tsiatas GC, Tsopelas P. New insights on rocking of rigid blocks: Analytical solutions and exact energy-based overturning criteria. *Earthquake Eng Struct Dyn.* 2022; 51(9): 1965–1993.
2. Housner G. The behavior of inverted pendulum structures during earthquakes. *Bull Seismol Soc Am.* 1963; 53(2): 403–417.
3. Makris N. A half-century of rocking isolation. *Earthquake Struct.* 2014; 7(6): 1187–1221.
4. Chatzis MN, Smyth AW. Robust Modeling of the Rocking Problem. *J Eng Mech.* 2012; 138: 247–262.
5. Chatzis MN, Espinosa MG, Smyth AW. Examining the Energy Loss in the Inverted Pendulum Model for Rocking Bodies. *J Eng Mech.* 2017; 143: 04017013.
6. Makris N, Vassiliou MF, Sizing the slenderness of free-standing rocking columns to withstand earthquake shaking. *Arch Appl Mech.* 2012; 82: 1497–1511.